Aufgabe 1: Entwurf eines Kalman-Filters

(EntwurfKalman)

Gegeben ist folgendes System im Zustandsraum:

$$\begin{aligned} x(n+1) &= 0{,}5x(n) + u(n) + v(n) \\ y(n) &= x(n) + w(n) \end{aligned}$$

Dabei ist $u(n)$ die deterministische Eingangsgröße des Systems, $v(n)$ ist das Systemrauschen, $w(n)$ das Messrauschen.

a) Wie lauten die Kalman-Rekursionsgleichungen für das gegebene System?

b) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild für das gegebene System und das Kalman-Filter.

Im Folgenden gilt für die Varianzen der Rauschprozesse: $Q(n) = R(n) = 1$.

c) Berechnen Sie $K(n)$ für $n = 1, \dots, 4$. Als Startwert ist $\hat{P}(0) = 10$ vorgegeben.

d) Da ein zeitinvariantes System und zeitinvariante Rauschprozesse vorliegen, konvergiert der Verstärkungsfaktor für $n \to \infty$. Berechnen Sie den stationären Endwert.

Hinweis: Stellen Sie zunächst eine Rekursionsgleichung der Form

$$\hat{P}(n+1) = f\big(\hat{P}(n)\big)$$

auf. Der Grenzwert $\hat{P}_\infty := \lim\limits_{n\to\infty} \hat{P}(n)$ erfüllt die Gleichung $\hat{P}_\infty = f(\hat{P}_\infty)$.

Lösung

a) Die Kalman-Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} x^*(n+1) &= 0{,}5\hat{x}(n) + u(n) \\ P^*(n+1) &= 0{,}25\hat{P}(n) + Q(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(n+1) &= x^*(n+1) + K(n+1)\big(y(n+1) - x^*(n+1)\big) \\ \hat{P}(n+1) &= \big(1 - K(n+1)\big)^2 P^*(n+1) + K^2(n+1)R(n+1) = \big(1 - K(n+1)\big)P^*(n+1) \end{aligned}$$

$$K(n+1) = \frac{P^*(n+1)}{P^*(n+1) + R(n+1)}$$

b) Das Blockschaltbild ist in Abbildung L1 dargestellt.

c) Mit den vorgegebenen Varianzen ergeben sich folgende Rekursionsgleichungen:

$$P^*(n+1) = 0{,}25\hat{P}(n) + 1 \tag{L1a}$$

$$K(n+1) = \frac{P^*(n+1)}{P^*(n+1) + 1} \tag{L1b}$$

$$\hat{P}(n+1) = \big(1 - K(n+1)\big)^2 P^*(n+1) + K^2(n+1) \tag{L1c}$$

Mit dem Startwert $\hat{P}(0) = 10$ können die Werte in Tabelle L1 berechnet werden.

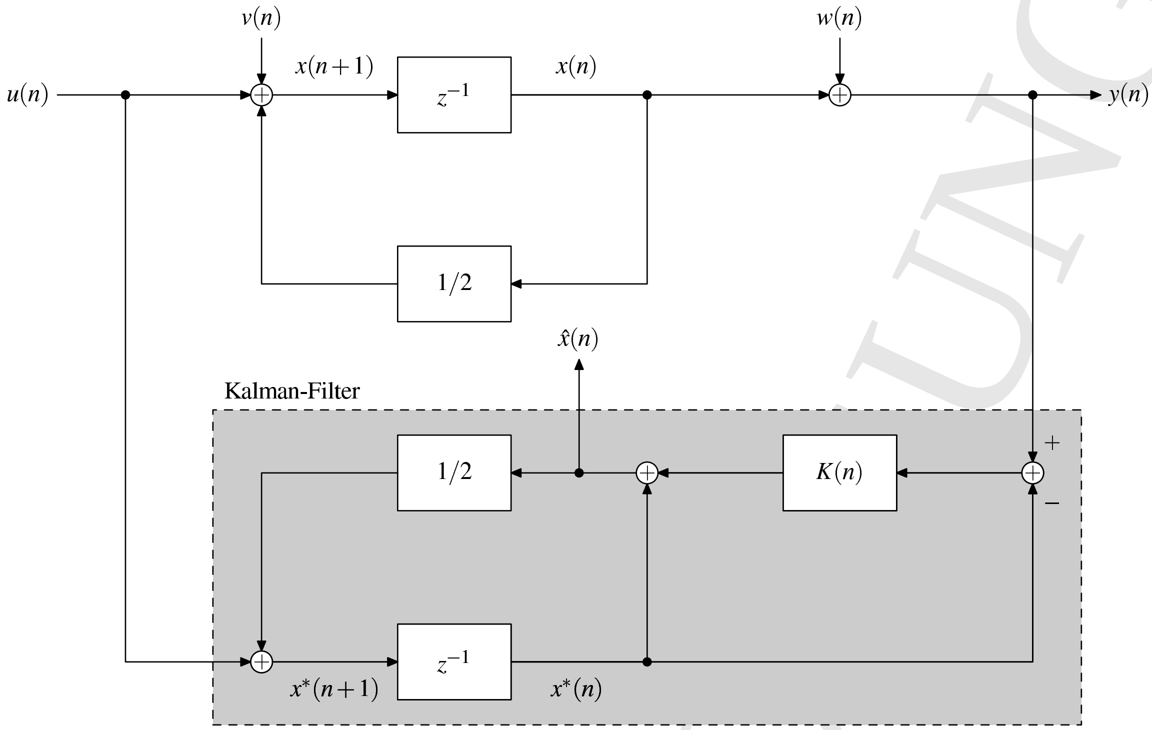

Abbildung L1: Blockschaltbild des Systems mit Kalman-Filter

n	$P^*(n)$	$K(n)$	$\hat{P}(n)$
1	3,5	0,7778	0,7778
2	1,1944	0,5543	0,5543
3	1,1361	0,5319	0,5319
4	1,1330	0,5312	0,5312

Tabelle L1: Rekursive Berechnung des Verstärkungsfaktors

d) Um eine Rekursionsgleichung der gewünschten Form zu erhalten, wird zunächst Gl. (L1b) in Gl. (L1c) eingesetzt:

$$\hat{P}(n+1) = \left(1 - \frac{P^*(n+1)}{P^*(n+1)+1}\right) \cdot P^*(n+1) = \frac{P^*(n+1)}{P^*(n+1)+1}$$

In diese Gleichung wird nun Gl. (L1a) eingesetzt:

$$\hat{P}(n+1) = \frac{0{,}25\hat{P}(n)+1}{0{,}25\hat{P}(n)+2} = \frac{\hat{P}(n)+4}{\hat{P}(n)+8}$$

Der Grenzwert $\hat{P}_\infty$ erfüllt demnach die Gleichung:

$$\hat{P}_\infty = \frac{\hat{P}_\infty + 4}{\hat{P}_\infty + 8}$$

Durch Äquivalenzumformung ergibt sich eine quadratische Gleichung

$$\hat{P}_\infty^2 + 7\hat{P}_\infty - 4 = 0$$

mit den Lösungen

$$\hat{P}_\infty = -\frac{7}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{65}\,.$$

Die gesuchte Größe ist eine Varianz und muss daher positiv sein. Daher lautet die gesuchte Lösung:

$$\hat{P}_\infty = \frac{\sqrt{65}-7}{2}$$

Daraus folgt

$$P^*_\infty = \frac{1}{4}\hat{P}_\infty + 1 = \frac{\sqrt{65}-7}{8} + 1 = \frac{\sqrt{65}+1}{8}$$

und schließlich

$$K_\infty = \frac{P^*_\infty}{P^*_\infty + 1} = \frac{\sqrt{65}+1}{\sqrt{65}+9} = \frac{(\sqrt{65}+1)(\sqrt{65}-9)}{(\sqrt{65}+9)(\sqrt{65}-9)} = [\ldots] = \frac{\sqrt{65}-7}{2} \approx 0{,}5311$$

Aufgabe 2: Kalman-Filter zur Positionsbestimmung eines Fahrzeuges

(KalmanFahrzeug)

Zur zeitdiskreten Positionsbestimmung eines Fahrzeuges werden die Weg- und die Winkeländerung pro Abtastschritt mit Hilfe eines Gierratensensors[1], Inkrementalgebern an den Rädern (ABS-Sensoren) sowie Beschleunigungssensoren erfasst. Durch die große Anzahl an Sensoren ergibt sich eine Redundanz bei der Berechnung der Fahrzeugposition. Diese Redundanz wird bei der Sensor-Datenfusion genutzt, um den Einfluss von Messfehlern zu verringern. Dafür eignet sich das Kalman-Filter.
In dieser Aufgabe soll ein Kalman-Filter zur Schätzung des Winkels θ des Fahrzeuges (bezüglich eines ortsfesten Koordinatensystems) entworfen werden. Aus den Inkrementalgebern wird in jedem Abtastschritt eine Winkeländerung $\Delta\theta_{\text{IG}}$ ermittelt. Der Gierratensensor liefert einen absoluten Wert θ_{Gier} für den Winkel. Beide Größen sind durch überlagertes weißes Rauschen $\tilde{v}(n)$ bzw. $w(n)$ verfälscht:

$$\Delta\theta_{\text{IG}}(n) = \Delta\theta + \tilde{v}(n) \tag{1a}$$

$$\theta_{\text{Gier}}(n) = \theta + w(n) \tag{1b}$$

Die Varianzen der Störprozesse $\sigma_v^2(n)$ und $\sigma_w^2(n)$ sind durch Schätzung bekannt. Die ungestörten Sensorsignale sind nicht zugänglich.
Der absolute Fahrzeugwinkel kann durch Summation der Winkeländerungen in jedem Zeitschritt rekursiv berechnet werden:

$$\theta(n+1) = \theta(n) + \Delta\theta(n)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (1a) ergibt sich:

$$\theta(n+1) = \theta(n) + \Delta\theta_{\text{IG}}(n) - \tilde{v}(n)$$

Der stochastische Prozess $v(n) := -\tilde{v}(n)$ ist ebenfalls ein weißer Rauschprozess. Mit dieser neuen Bezeichnung sowie Gl. (1b) ergibt sich ein zeitdiskretes Zustandsraummodell:

$$\theta(n+1) = \theta(n) + \Delta\theta_{\text{IG}}(n) + v(n) \qquad \text{Zustandsgleichung}$$

$$\theta_{\text{Gier}}(n) = \theta(n) + w(n) \qquad \text{Ausgangsgleichung}$$

Diese Gleichungen beschreiben ein System mit dem realen Winkel als Zustandsgröße. Eingangssignal ist die vom Inkrementalgeber ermittelte Winkeländerung, Ausgangssignal der vom Gierratensensor gemessene absolute Winkel. Die Ein- und Ausgangsgröße sind also messbare Größen, die Zustandsgröße ist die gesuchte Größe, die mit Hilfe eines Kalman-Filters geschätzt werden soll.

a) Geben Sie die Gleichungen des Kalman-Filters an.

b) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Winkelmesssystems und des Kalman-Filters.

c) Welchen Schätzwert erhält man, wenn das Signal des Inkrementalgebers stark verrauscht ist im Vergleich zum Gierratensensor, d. h. $\sigma_v^2 \gg \sigma_w^2$?

d) Welchen Schätzwert erhält man, wenn das Signal des Gierratensensors stark verrauscht ist im Vergleich zum Inkrementalgeber, d. h. $\sigma_w^2 \gg \sigma_v^2$?

---

[1] Die Gierrate ist die Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die Fahrzeughochachse relativ zu einem ortsfesten Koordinatensystem. Dabei ist die Hochachse die senkrechte Achse durch den Fahrzeugschwerpunkt.

Lösung

a) Die Kalman-Gleichungen lauten:

$$\theta^*(n+1) = \hat{\theta}(n) + \Delta\theta_{\text{IG}}(n) \tag{L2a}$$
$$P^*(n+1) = \hat{P}(n) + \sigma_v^2(n) \tag{L2b}$$

$$\hat{\theta}(n+1) = \theta^*(n+1) + K(n+1)\big(\theta_{\text{Gier}}(n+1) - \theta^*(n+1)\big) \tag{L2c}$$
$$\begin{aligned}\hat{P}(n+1) &= \big(1 - K(n+1)\big)^2 \cdot P^*(n+1) + K^2(n+1)\cdot\sigma_w^2(n+1)\\ &= \big(1 - K(n+1)\big)\cdot P^*(n+1)\end{aligned} \tag{L2d}$$

$$K(n+1) = \frac{P^*(n+1)}{P^*(n+1) + \sigma_w^2(n+1)} \tag{L2e}$$

b) Das Blockschaltbild ist in Abbildung L2 dargestellt.

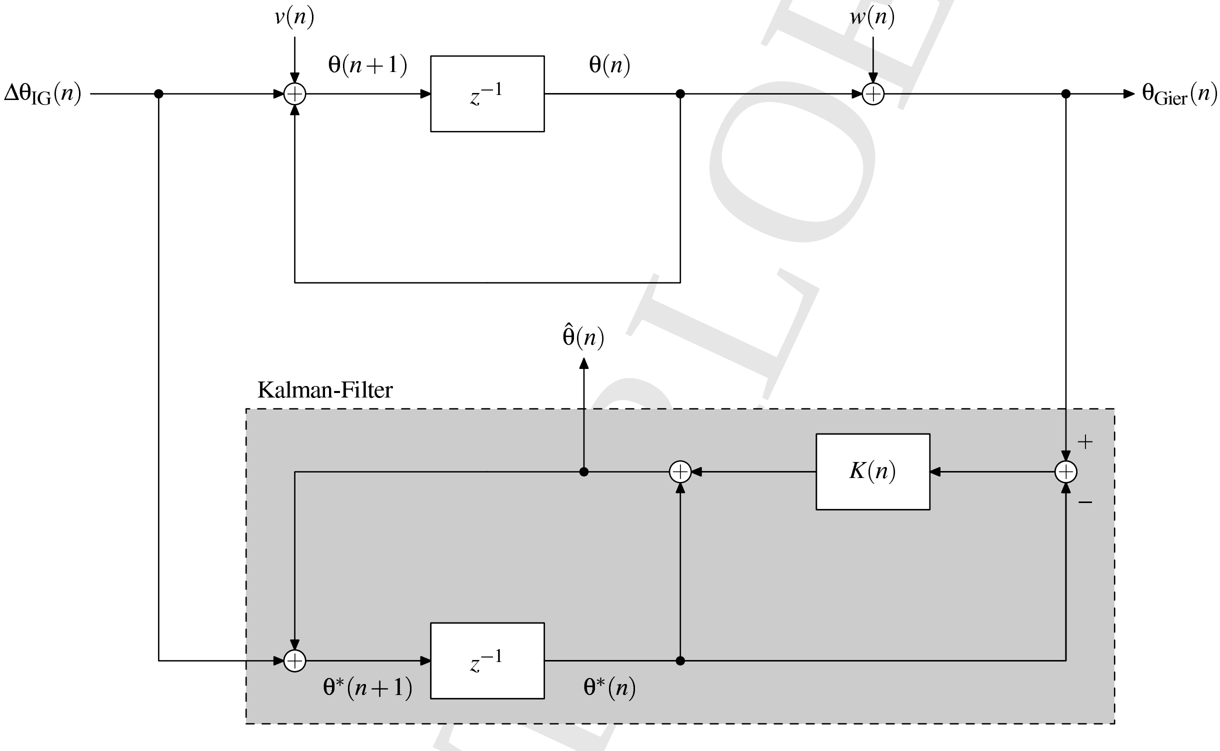

Abbildung L2: Winkelmesssystem mit Kalman-Filter

c) Einsetzen von Gl. (L2b) in Gl. (L2e) liefert:

$$K(n+1) = \frac{\hat{P}(n) + \sigma_v^2(n)}{\hat{P}(n) + \sigma_v^2(n) + \sigma_w^2(n+1)} \tag{L3}$$

Für $\sigma_v^2 \gg \sigma_w^2$ folgt

$$K(n+1) \approx 1\,.$$

Der geschätzte Zustand nach Gl. (L2c) ist damit:

$$\hat{\theta}(n+1) = \theta^*(n+1) + 1\cdot\big(\theta_{\text{Gier}}(n+1) - \theta^*(n+1)\big) = \theta_{\text{Gier}}(n+1)$$

Das Kalman-Filter berücksichtigt ausschließlich den Gierratensensor.

d) Aus Gl. (L3) folgt für $\sigma_w^2 \gg \sigma_v^2$:

$$K(n+1) \approx 0$$

Daraus folgt mit Gl. (L2c) der Schätzwert:

$$\hat{\theta}(n+1) = \theta^*(n+1) = \hat{\theta}(n) + \Delta\theta_{\mathsf{IG}}(n)$$

Das bedeutet, dass das Kalman-Filter ausschließlich den Inkrementalgeber berücksichtigt und die differenzielle Winkelinformation zum letzten Schätzwert addiert.